

STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

ZW 1950-016

Over driehoeken waarin een hoek een geheel
veelvoud is van een andere hoek

H.J.A. Duparc



1950

H. J. A. Duparc

Over driehoeken waarin een hoek een geheel veelvoud is van een andere hoek.

Beschouw een $\triangle ABC$ met de eigenschap $\alpha = n\beta$ (de zijden van de driehoek worden aangegeven door a, b en c de corresponderende hoeken door α, β en γ).

Indien hierin geldt $\alpha = n\beta$, bestaat er een relatie tussen de zijden, die wij aangeven met $f_n(a, b, c) = 0$. Zo luidt f_1 b.v. $f_1(a, b, c) = a - b$.

Het is niet moeilijk op de vorm f_n te bepalen, indien f_{n-1} bekend is. Teken daartoe in $\triangle ABC$, waarin $\alpha = n\beta$, een rechte door A zodanig, dat $\angle CAD = \beta$, dus $\angle DAB = (n-1)\beta$.

Dan heeft men

$$AD = \frac{b^2}{a}, \quad CD = \frac{b^2}{a}, \quad \text{dus } BD = \frac{a^2 - b^2}{a}$$

In $\triangle ABC$ geldt dan en slechts dan

geldt $f_{n-1}(a', b', c') = 0$, waarin a', b' en c' de lengten der zijden van $\triangle ABD$ voorstellen. Men heeft dus:

$$\begin{aligned} f_n(a, b, c) &= K f_{n-1}(a', b', c') = K f_{n-1}\left(\frac{a^2 - b^2}{a}, \frac{bc}{a}, c\right) \\ &= K_1 f_{n-1}(a^2 - b^2, bc, ac). \end{aligned}$$

Het laatste gelijkteken geldt wegens het homogeen karakter van de vormen (waarvan men zich hetzij direct, hetzij door volledige inductie kan overtuigen).

Wij vinden dus

$$f_n(a, b, c) = K_1 f_{n-1}(a^2 - b^2, bc, ac).$$

Voorbepaling. Zoals al opgemerkt is, is

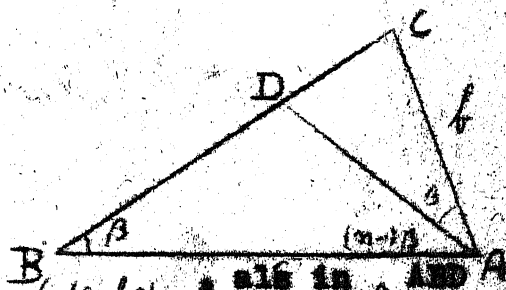
$$f_1(a, b, c) = a - b$$

Dus

$$f_2(a, b, c) = K_2 f_1(a^2 - b^2, bc, ac) = K_2 (a^2 - b^2 - bc)$$

Neem

$$f_2(a, b, c) = a^2 - b^2 - bc$$



Verder $f_2(a, b, c) = K_3 f_2(a^2 - b^2 - bc, ac) = K_3 \{(a^2 - b^2)^2 - b^2 c^2 - a^2 c^2\}$
 $= K_3 (a+b) \{(a+b)(a-b)^2 - bc^2\}$

Daar

$$f_2(a, b, c) = (a+b)(a-b)^2 - bc^2$$

Verder

$$\begin{aligned} f_4(a, b, c) &= K_4 f_2\{(a^2 - b^2), bc, ac\} \\ &= K_4 \{(a^2 - b^2 + bc)(a^2 - b^2 - bc)^2 - bc \cdot a^2 c^2\} \\ &= K_4 \{(a^2 - b^2)^3 - (a^2 - b^2)^2 bc - (a^2 - b^2) b^2 c^2 + b^3 c^2 - a^2 bc^2\} \\ &= K_4 (a^2 - b^2) \{(a^2 - b^2)^2 - (a^2 - b^2) bc - b^2 c^2 - bc^2\} \end{aligned}$$

Daar

$$f_4(a, b, c) = (a^2 - b^2)^2 - (a^2 - b^2) bc - (b+c) bc^2$$

Verder

$$\begin{aligned} f_5(a, b, c) &= K_5 f_4(a^2 - b^2, bc, ac) \\ &= K_5 \{(a^2 - b^2 - bc)^2 (a^2 - b^2 - bc) - a^2 bc^2 (a^2 - b^2 - bc) \\ &\quad - a^2 bc^2 (a+b)\} \\ &= K_5 (a^2 - b^2) \{(a^2 - b^2)^3 - 2 b^2 c^2 (a^2 - b^2) - a^2 bc^2 (a^2 - b^2) - b^2 c^2 - a^2 bc^2\} \\ &= K_5 (a-b)(a+b) \{(a+b)^2 (a^2 - b^2)^2 - 2 b^2 c^2 (a-b) - a^2 bc^2 (a-b) - bc^2\} \end{aligned}$$

Daar

$$f_5(a, b, c) = (a+b)^2 (a-b)^3 - bc^2 (a+2b)(a-b) - bc^4$$

Men kan gemakkelijk zien van de extra factoren $a+b$ en $a-b$, die bij de bepaling der vorm f_n uit f_{n-1} optreden, een eigenschap te geven.

Latens we een $\Delta A'B'C'$ met zijden

$$a' = a - \frac{b^2}{a}, \quad b' = \frac{bc}{a}, \quad c' = c$$

betrachten, waarin $\alpha' = (n-1)\alpha$

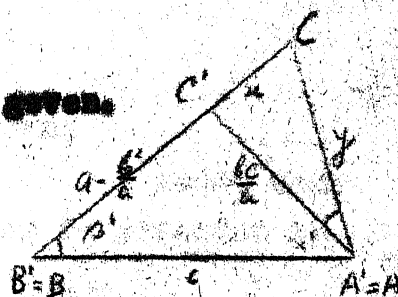
Onderstel, zoals steeds, $a \neq 0$

Naak $\angle(A'C'B' = \alpha$ te ontstaat een driehoek $A'B'C'$ met $\alpha = \angle CA'B' =$

$n\alpha$ ($\alpha = \alpha'$); hierin is ondersteld dat $A'C'$ en $B'C'$ niet samenvallen

Ligt C' niet op $B'A'$, dan zijn de rechten $A'C'$ en $B'C'$ verschillend, dus C is vastgelegd. Het geval dat C' op $B'A'$ ligt, werde ons apart betrekken.

Op grond van gelijkvormigheid ($\Delta CBA' \sim \Delta C'B'A'$) heeft men
 f) dus A' niet op $B'C'$



$$x:y = \frac{bc}{a} : c ; y:(d - \frac{b^2}{a} + x) = \frac{bc}{a} : c$$

dan

$$cx = \frac{bcy}{a} ; cy = bc - \frac{b^2c}{a^2} + \frac{bcx}{a} = bc - \frac{b^2c}{a^2} + \frac{bc^2}{a^2}$$

derhalve $c y (a^2 - b^2) = c b^2 (a^2 - b^2)$

. Hieruit volgen

de gevallen

1. $c=0$ Dan liggen echter A, B en C wel collineair, zelfs vallen deze punten dan samen, zodat men dan tevens heeft $B'C' = 0$ dus $a^2 = b^2$ (zie 4.)

2. $a^2 = b^2$ Ook in dit geval zijn A, B en C collineair (zie 4.)

3. $y=b$, dan $x = \frac{b^2}{a}$ waaruit volgt dat de zijden van $\triangle A'B'C'$ resp. gelijk zijn aan a, b en c en dat twee hoeken voldoen aan

$\alpha = \pi/\beta$ In dit geval levert f_n ons de gewenste relatie f_n

4. beschouwt men het geval dat A, B, C collineair zijn slechts het geval $\alpha' = \beta' = 0$, dan heeft men volgens $\alpha' = \pi - \beta'$

$$a = \frac{b^2}{a} + \frac{bc}{a} = c$$

derhalve $a^2 - b^2 = c(a - b)$ In dit geval vindt men $a+b=c$ of $a=b$

Omst men driehoeken te construeren met $\alpha = \pi/\beta$, dan kan men uitgaan van een willekeurige hoek $\beta < \frac{\pi}{2}$ en daardoor

$\alpha = \pi/\beta$ construeren, waarna een driehoek met de gewenste eigenschap bepaald (geconstrueerd) is.

Omst men rationale driehoeken te vinden met de gewenste eigenschap (een driehoek heet rationaal, als de verhouding zijner zijden rationaal is), dan merke men op, dat een alle rationale punten (x, y, z) hier vlakke kromme $f_n(x, y, z) = 0$ dienen te bepalen. Deze vindt men als volgt.

In een rationale driehoek zijn, volgens de sinus regel, $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ rationaal, dus $\sin \alpha, \sin \beta$ en $\sin \gamma$ van de gedaante $\frac{p}{\sqrt{m}}$, waarin p en m rationaal zijn. Volgens $\tan \frac{\alpha}{2} = \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha}$ zijn dan $\tan \frac{\alpha}{2}, \tan \frac{\beta}{2}, \tan \frac{\gamma}{2}$ ook van de gedaante $\frac{p}{\sqrt{m}}$. Stel nu $\tan \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{\sqrt{e}}$; dan zijn $\tan \frac{\beta}{2} = \frac{1}{\sqrt{e}} \frac{m\beta}{e}$ en $\tan \frac{\gamma}{2} = \frac{\cos \frac{\alpha}{2}}{1 + \cos \alpha}$ van de gedaante $\frac{p}{\sqrt{e}}$ (rationaal), zodat volgens $\sin \gamma = \frac{2 \tan \frac{\gamma}{2}}{1 + \tan^2 \frac{\gamma}{2}}$ men vindt $\sin \alpha, \sin \beta, \sin \gamma = a'\sqrt{e}, b'\sqrt{e}, c'\sqrt{e}$, zodat men

(x, y, z) een rationale parameter voorstelling is gevonden in t

Voorbeeld $t = \frac{1}{7}$; $m=3$ $\tan \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{7}\sqrt{7}$ $\tan \frac{\beta}{2} = \frac{5}{7}\sqrt{7}$ $\tan \frac{\gamma}{2} = \sqrt{7}$

$$\sin \alpha = \frac{5\sqrt{7}}{10}; \sin \beta = \frac{1}{5}\sqrt{7}; \sin \gamma = \frac{1}{10}\sqrt{7}$$

de dr. $a=10, b=5, c=1$.

In het proefschrift van J.H.J. Almering *) werden speciaal figuren bestudeerd, die uit driehoeken bestaan, waarin de tangenten der halve hoeken zelf, of eerst na bundelconstructie, rationaal zijn en op blz. 26 en 27 geeft hij het voorbeeld van een driehoek ABC met $a=10, b=5, c=1$ en $\alpha = 38$

Tenst men ten slotte de coëfficiënten van de vorm f_n direct te vinden, dan kan men als volgt te werk gaan. Uit de formule van de Moivre volgt

$$\begin{aligned}\cos n\beta &= \operatorname{Re}(\cos \beta + i \sin \beta)^n \\ &= \cos^n \beta - \binom{n}{2} \cos^{n-2} \beta \sin^2 \beta + \binom{n}{4} \cos^{n-4} \beta \sin^4 \beta - \dots\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos \frac{a^2 - b^2 + c^2}{2bc} &= \left(\frac{a^2 - b^2 + c^2}{2bc} \right)^n - \binom{n}{2} \left(\frac{a^2 - b^2 + c^2}{2bc} \right)^{n-2} \left[1 - \left(\frac{a^2 - b^2 + c^2}{2bc} \right)^2 \right] \\ &\quad + \binom{n}{4} \left(\frac{a^2 - b^2 + c^2}{2bc} \right)^{n-4} \left[1 - \left(\frac{a^2 - b^2 + c^2}{2bc} \right)^2 \right]^2.\end{aligned}$$